

富松–佐藤解と戸田分子方程式の関係について

小 泉 耕 蔵
福 山 武 志

(平成 22 年 9 月 24 日提出)
(平成 22 年 11 月 22 日修正)

要 旨

定常軸対称なアインシュタイン方程式の解である富松–佐藤解と戸田分子方程式の特別な半無限解の関係に対する中村予想を考察する．Ernst 方程式の持つ $SU(1,1)$ 対称性は，戸田分子方程式の特殊な二つの解の線形結合として反映される．あるパラメータ t で構成関数を展開することにより，中村予想がパラメータ t の最高次および最低次の次数で成り立つことが証明される．

キーワード：一般相対性理論，Ernst 方程式，富松–佐藤解，戸田分子方程式，中村予想

1. 序 論

アインシュタイン方程式の厳密解は，ブラックホールやイベントホライズンといった重要な物理的概念を導き一般相対性理論に対して多くの知見を齎してきた．一般的に，アインシュタイン方程式の厳密解のなす空間を完全に構成することは，この方程式が可積分でないため原理的に不可能である．しかしながら，高い対称性を持つ時空間では，アインシュタイン方程式の厳密解が系統的に求まる可能性がある．すなわち，一般に対称性は系に保存量を付与し，アインシュタイン方程式を可積分にする可能性がある．

時空に定常軸対称性を課した場合アインシュタイン方程式は，Ernst 方程式の問題に帰着される．Ernst 方程式は，定常軸対称なアインシュタイン方程式の解として従来知られていた Kerr 解の単純な構成を与えるために Ernst により導入された [1]．Geroch [2] は，Ernst 方程式の無限次元内部対称性に基づく変換によりある一つの解から漸近平坦かつ定常軸対称な全ての真空解を構成できるという予想を立てたが，具体的な解の構成法は未解決であった．それとは独立に，富松–佐藤は，アインシュタイン方程式の解である Weyl 解と Kerr 解を記述する Ernst ポテンシャルの形に着目して低次の富松–佐藤解 (TS 解) を導出した [3]．この TS 解の発見を皮切りにして，Ernst 方程式の構造および解の導出法の研究が多くの研究者により行われた．その中で，Ernst 方程式の完全可積分性が Maison [4] および Belinski-Zakharov [5] により証明され，Neugebauer らによる Bäcklund 変換 [6] を用いた新しい解の構成法や Belinski および Zakharov らによる Lax 形式

を用いた逆散乱法による解の定式化 [5] が見出され、富松-佐藤解への理論的導出およびその意味づけが明らかにされた。

興味深いことに、Ernst 方程式は、反自己双対 SU(2) Yang-Mills 方程式のある次元簡約化と等価であることが示されている。さらに、この方程式は可積分系の特性である Painlevé 性や Lax 表現を持つ。一方で、Ernst 方程式は、反自己双対 Yang-Mills 方程式と同様に Grassmann 多様体を用いる佐藤理論 [7] に収まらない高次元可積分模型であることが知られている。Ernst 方程式の構造を理解することは、重力理論の新しい解の構成だけではなく、高次元可積分模型への理解に重要な役割を果たすと考えられる。

広田の双線形化法による Ernst 方程式の研究 [8] から、中村明 [9] は、TS 解が二次元戸田分子方程式の半無限分子解の特殊な二つのペアから構成できるという予想をした（中村予想）。この予想せぬ可積分模型と重力解の繋がり、重力解の構成法に新しい知見をもたらす可能性がある。この予想は、Weyl 解に限定した場合、福山・上村・兪 [10] (FKY) により証明されているが、一般的証明は現在のところ与えられていない。

本論文では、中村予想に隠された対称性構造を明らかにし、FKY とは異なった方法でこの予想の部分的証明を与える。本論文は、以下のように構成される。第 2 節では、定常軸対称性を持つアインシュタイン方程式から Ernst 方程式の導出を行い、低次の富松-佐藤解および Ernst 方程式が持つ連続対称性について議論する。第 3 節では、戸田分子方程式の半無限解とある特別な解の間の線形結合もまた戸田分子方程式の半無限解となることを証明する。また、ある特別な初期条件を持つ半無限解がある双線形形式を満たすことが示される。第 4 節では、Ernst 方程式が有する対称性が中村予想に現れる双線形形式を共変にする事が示される。この対称性は、戸田分子方程式に於いては特別な解の対の線形結合として翻訳される。第 5 節では、ある複素パラメータ t が導入され、中村予想の構成関数 g_n, f_n を形式的にパラメータ t でローラン展開する。この展開により、構成関数 g_n, f_n の性質が浮き彫りになる。特に、両関数の t に対する最高次数および最低次数のローラン係数が、解析的に明確な多項式表現として求められ、中村予想の双線形形式を t で展開することによって得られる最高次および最低次の式が正しいことが証明される。

2. 定常軸対称アインシュタイン方程式について

一般相対論によって記述される重力理論に於いて、重力の影響はリーマン多様体が齎す幾何学として表現される。重力場と物質場の相互作用はアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1)$$

によって規定される。ここで、 $R_{\mu\nu}$ および R は、それぞれ多様体のリッチテンソルとスカラー

曲率である．また，右辺の $T_{\mu\nu}$ は，物質場のストレステンソル（エネルギー・運動量テンソル）を表す．物質が存在しない領域 ($T_{\mu\nu} = 0$) では，上記のアインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2)$$

に帰着される．上式の解は，真空解と呼ばれている．この方程式に何の対称性も要請せずに厳密解を求めることは，系の自由度を完全に固定できるだけの保存量が足りないために困難を極める．従って，時空に何らかの対称性を課す必要性がある．ここでは，定常的に自転している物質が作り出す場を考える．そのような物質によって引き起こされる重力場は，その回転軸に関して軸対称性を持つと考えられる．軸対称性を課した定常時空には，キリング方程式

$$\mathcal{L}_\eta g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu}\eta_{\nu)} = 0 \quad (3)$$

を満たす互いに可換な二つのキリングベクトルが存在する．この二つのキリングベクトルの存在のため，計量は循環型と呼ばれるブロック対角型

$$ds^2 = g_{ab}(\rho, z)dx^a dx^b + e^{2\chi(\rho, z)}(d\rho^2 + dz^2) \quad (4)$$

に表すことができる [11]．ここで， $x^a = (t, \theta)$ は二つのキリング座標を表し， (ρ, z) は，二つのキリングベクトル $\eta_{(t)}^a, \eta_{(\theta)}^a$ に垂直な部分多様体の座標である．この計量から導出されるアインシュタイン方程式の一部分

$$R_t^t + R_\theta^\theta = 0 \quad (5)$$

に注目すると，方程式

$$(\partial_\rho^2 + \partial_z^2)W = 0 \quad (6)$$

が得られる．ここで，

$$W = \sqrt{-\det(g_{ab})} \quad (7)$$

である．また，定常軸対称な計量 (4) の共形変換の自由度を考慮すると，一般性を失うことなく

$$W = \rho \quad (8)$$

と選ぶことができる．結果として，定常軸対称な計量は

$$ds^2 = -\phi(dt - \omega d\theta)^2 + \phi^{-1}(\rho^2 d\theta^2 + e^{2\gamma}(dz^2 + d\rho^2)) \quad (9)$$

に帰着される．ここで， ϕ, ω, γ は， ρ および z の関数である．また，アインシュタイン方程式 $R_{tt} = 0, R_{t\theta} = 0$ より， $\nabla \cdot (\rho^{-2} \phi^2 \nabla \omega) = 0$ が得られる．したがって

$$\partial_\rho \psi = \frac{\phi^2}{\rho} \partial_z \omega, \quad \partial_z \psi = -\frac{\phi^2}{\rho} \partial_\rho \omega, \quad (10)$$

を満たすツイストポテンシャル ψ が存在する．さらに，Ernst ポテンシャル

$$\zeta = \phi - i\psi \quad (11)$$

を導入することで，アインシュタイン方程式から Ernst 方程式

$$\frac{\zeta + \zeta^*}{2} \nabla^2 \zeta - \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta = 0 \quad (12)$$

が得られる．残りのアインシュタイン方程式に現れるポテンシャルは，上式の Ernst 方程式を解くことにより求積法を用いて決定される．

非自明な定常軸対称性解を導出するために，

$$\xi = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \quad (13)$$

と変換することによって得られる非線形微分方程式

$$(\xi \xi^* - 1) \nabla^2 \xi = 2 \xi^* \nabla \xi \cdot \nabla \xi \quad (14)$$

を考察する．この単純な解としては，Weyl 解

$$\xi = \frac{(x+1)^\delta + (x-1)^\delta}{(x+1)^\delta - (x-1)^\delta} \quad (15)$$

が存在する．この解は， ξ に複素成分を含まないために回転のない軸対称時空を記述する．ここで， (x, y) は，

$$\rho = \sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)}, \quad z = xy \quad (16)$$

によって定義される扁平楕円体座標である．また， δ は変形パラメータを表す．

富松-佐藤は，この Weyl 解の形に着目して， ξ を

$$\xi = \frac{g}{f} \quad (17)$$

の形の二つの構成関数 f, g に分解することで， $\delta = 1, 2, 3, 4$ に対して新しい軸対称な重力の真空解（富松-佐藤解）を導出した．例えば， $\delta = 1, 2, 3$ に対して

□ 富松-佐藤解 ($\delta = 1, 2, 3$)

- $\delta = 1$

$$g = px - iqy, \quad f = 1 \quad (18)$$

- $\delta = 2$

$$\begin{aligned} g &= p^2(x^4 - 1) + q^2(y^4 - 1) - 2ipqxy(x^2 - y^2), \\ f &= 2px(x^2 - 1) - 2iqy(1 - y^2) \end{aligned} \quad (19)$$

- $\delta = 3$

$$\begin{aligned} g &= p(x^2 - 1)^3(x^3 + 3x) + iq(1 - y^2)^3(y^3 + 3y) \\ &\quad - pq^2(x^2 - y^2)^3(x^3 + 3xy^2) - ip^2q(x^2 - y^2)^3(y^3 + 3x^2y), \\ f &= p^2(x^2 - 1)^3(3x^2 + 1) - q^2(1 - y^2)^3(3y^2 + 1) \\ &\quad - 12ipqxy(x^2 - y^2)(x^2 - 1)(1 - y^2) \end{aligned} \quad (20)$$

である．ここで， $p^2 + q^2 = 1$ であり，パラメータ q は系の角運動量に比例するパラメータである．特に， $\delta = 1$ は，Kerr 解に対応する．

この富松-佐藤クラスの解の発見を皮切りに，Ernst 方程式の解の導出法やその構造が詳細に研究されてきた．その中で特に重要となるのは Ernst 方程式が有する対称性である．この対称性は，Ernst 方程式の既知の解から様々な解を生成するアルゴリズムを与える．このアルゴリズムは，ソリトンの物理学で良く知られている Bäcklund 変換である．

方程式 (14) の対称性を見るために，底空間を 3 次元ユークリッド空間とし 2 次元双曲面をターゲット空間とするシグマモデルラグランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{\nabla \xi \cdot \nabla \xi^*}{(\xi^* \xi - 1)^2} \quad (21)$$

が有効である．Ernst 方程式は，この変分問題を考察することによって導出される．このシグマモデルラグランジアンは， $SU(1,1)$ 変換

$$\xi' = \frac{\alpha \xi + \beta^*}{\beta \xi + \alpha^*}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 \neq 0 \quad (22)$$

の下で不変である．この変換は自明なスケール変換，ある並進変換および非自明な Ehlers 変換を含む．Weyl 解に Ehlers 変換を施すと，一般的に回転のない Weyl 解から回転を持つ解を生成する．特に，この変換によりシュワルツシルド解からは，Taub-NUT 解が得られることが知られている．また，堀は，高次の富松-佐藤解を行列式で表現した山崎の予想に対してこの $SU(1,1)$ 変換から得られる保存量に注目して証明を与えている [12]．この $SU(1,1)$ 変換以外にも，離散変換 $\xi \rightarrow \xi^*$ や境界条件を変える β 変換などの Bäcklund 変換が存在するが，ここではその

詳細に触れない^{†1}。

中村明は，定常軸対称な重力解である富松-佐藤解と戸田分子方程式の半無限解の間には密接な関係があることを予想した．この予想は，中村予想として現在知られている．中村予想については，4 節で述べられる．次節では，戸田分子方程式の解の組が有するある性質をなるべく一般的に議論する．

3. 戸田分子方程式の半無限解の性質

この節では，良く知られている戸田格子の可積分性を保ちつつ 2 次元時空の場の理論へ拡張した 2 次元戸田分子方程式の半無限解の性質について調べる．

2 次元戸田分子方程式は，

$$(\partial_X^2 - \partial_Y^2)U(n) = e^{-(U(n)-U(n-1))} - e^{U(n+1)-U(n)} \quad (23)$$

によって定義される．ここで， $V(n) = e^{-(U(n)-U(n-1))}$ と置き，さらに

$$V(n) = (\partial_X^2 - \partial_Y^2) \log \tau_n \quad (24)$$

となるタウ函数 τ_n を導入することで，2 次元戸田分子方程式は，広田の双線形形式を使って，

$$(D_X^2 - D_Y^2)\tau_n \cdot \tau_n = 2\tau_{n+1}\tau_{n-1} \quad (25)$$

と書き換えられる．ここで， D_X, D_Y は，

$$D_X^m D_Y^n (a(X, Y) \cdot b(X, Y)) = \frac{\partial^m}{\partial s^m} \frac{\partial^n}{\partial t^n} (a(X+s, Y+t)b(X-s, Y-t)) \Big|_{s=0, t=0} \quad (26)$$

によって定義される広田の双線形微分演算子である．

方程式 (25) の解として，両無限格子解，半無限格子解，非周期的格子解，周期的格子解が挙げられる．ここでは，半無限格子解に注目する．その解は，2 方向ロンスキアン(bidirectional Wronskian)

$$\tau_n = \det \begin{pmatrix} \psi & L_- \psi & \cdots & L_-^{n-1} \psi \\ L_+ \psi & L_+ L_- \psi & \cdots & L_+ L_-^{n-1} \psi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_+^{n-1} \psi & L_+^{n-1} L_- \psi & \cdots & L_+^{n-1} L_-^{n-1} \psi \end{pmatrix} \quad (27)$$

の形で一般的に与えられる．ここで， ψ は任意の関数であり， $L_{\pm} = \frac{\partial}{\partial X} \pm \frac{\partial}{\partial Y}$ である．行列式 τ_n

^{†1} 他の対称性は， $2N$ ソリトンを持つ Neugebauer 解を生成するのに重要な役割を果たす．詳しくは，文献 [13] を参照のこと．

の i 行 j 列を消すことにより得られる小行列式を $\tau_n \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ で定義する．この表式 (27) を戸田分子方程式 (25) に代入することで，関係式

$$\tau_{n+1} \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \tau_{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} - \tau_{n+1} \begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix} \tau_{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} + \tau_{n+1} \tau_{n+1} \begin{bmatrix} n, n+1 \\ n, n+1 \end{bmatrix} = 0. \quad (28)$$

が得られる．この関係式は，行列式に関する Jacobi 恒等式として知られている [14]．

戸田分子方程式の二つの解 τ_n と $\tau_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の間の線形結合

$$\tau_n \rightarrow \tau'_n = \alpha \tau_n + \beta^* \tau_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

もまた解であることが示される．ここで， α, β は任意の複素定数である．実際，上式の線形性が戸田分子方程式の解に存在するとすれば，戸田分子方程式に代入することにより関係式

$$(D_X^2 - D_Y^2) \tau_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tau_{n-1} + \tau_{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tau_{n+1} \quad (30)$$

を満たさなければならないことが分かる．これを行列式で表現すると

$$\begin{aligned} & \tau_{n+1} \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \tau_{n+1} \begin{bmatrix} 1, n+1 \\ 1, n+1 \end{bmatrix} + \tau_{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} \tau_{n+1} \begin{bmatrix} 1, n \\ 1, n \end{bmatrix} - \tau_{n+1} \begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix} \tau_{n+1} \begin{bmatrix} 1, n+1 \\ 1, n \end{bmatrix} \\ & - \tau_{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} \tau_{n+1} \begin{bmatrix} 1, n \\ 1, n+1 \end{bmatrix} - \tau_{n+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tau_{n+1} \begin{bmatrix} n, n+1 \\ n, n+1 \end{bmatrix} + \tau_{n+1} \tau_{n+1} \begin{bmatrix} 1, n, n+1 \\ 1, n, n+1 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

となる．上式が正しいことを証明するには，行列式をフェルミオン場から得られる相関関数と捉え，Wick の定理を適用することで容易に示される．すなわち，この式はある種の Pfaffian 恒等式になっていると謂える．別の証明として，変換 $\psi \rightarrow \psi' = \psi + \beta^* / \alpha$ を考える．この変換の下，行列式の形から関係式

$$\tau'_n = \tau_n \Big|_{\psi \rightarrow \psi'} = \tau_n + \frac{\beta^*}{\alpha} \tau_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

が得られる．この変換で得られたタウ関数 τ'_n は，明らかに戸田分子方程式の解である．さらに，戸田分子方程式の解のリスケリング不定性 $\tau_n \rightarrow \alpha \tau_n$ を使うと，一般性を失うことなく

$$\tau'_n = \alpha \tau_n + \beta^* \tau_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

が解であることが導ける．したがって，非線形 2 次元戸田分子方程式にはこの特殊な解の間に解の線形構造が存在する．

次に，初期条件 ψ が

$$\psi = \psi_1(X) - i\psi_2(Y) \quad (34)$$

であるとする．ここで $\psi_1(X)$ および $\psi_2(Y)$ はそれぞれ X および Y のみに依存した実関数である．そのとき，

$$D_X \left(\tau_n \cdot \tau_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \tau_n^* \cdot \tau_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (35)$$

$$D_Y \left(\tau_n \cdot \tau_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \tau_n^* \cdot \tau_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (36)$$

が導ける．この式は，FKY の証明 [10] と同様な方法で Pfaffian 恒等式に帰着される．

4. 中村予想およびその対称性について

この節では，定常軸対称な佐藤-富松解と戸田分子方程式解の間の関係に対する中村予想について考察する．ここで，中村予想とは以下で与えられる予想である．

- 中村予想

構成関数 g_n, f_n が次の二つの組の方程式

$$\begin{aligned} D_X(g_n \cdot f_n - g_n^* \cdot f_n^*) &= 0 \\ D_Y(g_n \cdot f_n + g_n^* \cdot f_n^*) &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

および

$$\begin{aligned} F(g_n^* \cdot f_n) &= 0 \\ F(g_n^* \cdot g_n + f_n^* \cdot f_n) &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

を満足するとき， $\xi_n = g_n/f_n$ は，Ernst 方程式

$$(\xi \xi^* - 1) \nabla^2 \xi - 2 \xi^* \nabla \xi \cdot \nabla \xi = 0 \quad (39)$$

を満たす富松-佐藤解を与える．ここで，

$$F = (x^2 - 1)D_x^2 + 2x\partial_x + (y^2 - 1)D_y^2 + 2y\partial_y + c_n \quad (40)$$

であり， (X, Y) と扁平楕円座標 (x, y) は， $x = -\coth X, y = -\coth Y$ によって結ばれる．以後，(37) を中村の第一組，(38) を中村の第二組と呼ぶことにする．

中村予想は，戸田分子方程式 τ_n の特別な解の組

$$g_n = \tau_n \Big|_{\psi=pX-iqY} = \left| pW_{i+j-1}(x) - iqW_{i+j-1}(y) \right|_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (41)$$

$$f_n = \tau_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Big|_{\psi=pX-iqY} = \left| pW_{i+j-1}(x) - iqW_{i+j-1}(y) \right|_{2 \leq i, j \leq n} \quad (42)$$

に於いて，

$$p^2 + q^2 = 1, \quad c_n = -2n^2, \quad \delta = n. \quad (43)$$

と選ぶことにより (37) および (38) を満たす富松-佐藤解を構成できるという主張である．ここで，

$$W_{n+1}(z) = (z^2 - 1) \frac{d}{dz} W_n, \quad W_1 = z$$

である．この $W_n(z)$ に対する多項式表現は

$$W_n(z) = \sum_{m=0}^{n-2} \left\{ \sum_{l=0}^m (-1)^l (m-l+1)^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} \right\} (z+1)^{m+1} (z-1)^{n-m-1}, \quad (n \geq 2),$$

で与えられる．ここで， $\begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}$ は二項係数である．

中村の第一組 (37) は，FKY により Pfaffian 恒等式を使って証明されている [10]．この性質は，戸田分子方程式の半無限解で $\psi = \psi_1(X) - i\psi_2(Y)$ でさえあれば必ず成り立つ式である（前節の式 (35) および (36) を参照のこと）．中村の第二組 (38) は，Weyl の場合 ($p = 1, q = 0$) を除き一般的証明が与えられていない．

もし中村予想が正しいのであれば，Ernst 方程式の連続 $SU(1,1)$ 対称性が戸田分子方程式の特別解にも反映されるはずである．そのことを見るために，Ernst 方程式の対称変換 (22) を $\xi = g_n/f_n$ の形に分解すると

$$\frac{g'_n}{f'_n} = \frac{\alpha g_n + \beta^* f_n}{\beta g_n + \alpha^* f_n} \quad (44)$$

である．この変換は連続的な大域的変換であるので，

$$g'_n = \alpha g_n + \beta^* f_n, \quad f'_n = \beta g_n + \alpha^* f_n \quad (45)$$

として変換すると見做してもよい．実際に，この変換で中村の第一組および第二組は共变的である．さらに，前節で見た解の線形性 (29) より，戸田分子方程式もこの変換の下で不変であることが示される．すなわち，Ernst 方程式の $SU(1,1)$ 対称性は，戸田分子方程式のある二組の解の線形性という形で反映される．この変換に付随して現れる恒等式 (30) は， f_n, g_n を使うと

$$(D_X^2 - D_Y^2) f_n \cdot g_n = f_{n+1} g_{n-1} + f_{n-1} g_{n+1} \quad (46)$$

と表される．

5. 戸田分子方程式の解の形式的ローラン展開と中村予想の部分的証明について

我々が示すべきことは，中村の第二組 (38) である．特に，式 (38) の下の式は， $p^2 + q^2 = 1$ の

条件の下で成り立つことに注意しなければならない．そのような関係式による無用な複雑さを取り除くために，

$$p = \frac{t + t^{-1}}{2}, \quad q = \frac{t - t^{-1}}{2i} \quad (47)$$

として複素パラメータ t を導入する．通常，富松-佐藤解ではパラメータ p, q は実数値を取るため，複素パラメータ t の可能な領域は一般的に $t \in \mathbb{C}, |t| = 1$ と限定される．

議論を明確にするために，関数 g_n, f_n の依存性を顕に

$$g_n = g_n(x, y; t), \quad f_n = f_n(x, y; t)$$

と書くことにする．関数 $g_n(x, y; t)$ および $f_n(x, y; t)$ の行列式の形 (41) により，それらは t に関してそれぞれ自由度 n および $n-1$ の形式的ローラン多項式であり

$$g_n(x, y; t) = \sum_{m=-n}^n \tilde{g}_n^{(m)}(x, y) t^m, \quad f_n(x, y; t) = \sum_{m=-n+1}^{n-1} \tilde{f}_n^{(m)}(x, y) t^m \quad (48)$$

に展開できることが分かる．この展開の下，関数 $g_n(x, y; t)$ および $f_n(x, y; t)$ の行列式表現から次の性質が容易に導出される：

- $t \leftrightarrow t^{-1}$ の下での共役性：

$$g_n^* = g_n(x, y; t^{-1}), \quad f_n^* = f_n(x, y; t^{-1})$$

- $y \rightarrow -y$ の下での共役性：

$$g_n^* = g_n(x, -y; t), \quad f_n^* = f_n(x, -y; t)$$

- t に関する偶奇性：

$$g_n(x, y; -t) = (-1)^n g_n(x, y; t), \quad f_n(x, y; -t) = (-1)^{n-1} f_n(x, y; t)$$

- $t \rightarrow it$ の変換性：

$$g_n(x, y; it) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-i)^n g_n(y, x; t), \quad f_n(x, y; it) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-i)^{n-1} f_n(y, x; t)$$

これらの性質から， f_n, g_n の t に関するローラン係数の間に，関係式

$$\tilde{g}_n^{(-m)}(x, y) = \tilde{g}_n^{(m)}(x, -y), \quad \tilde{f}_n^{(-m)}(x, y) = \tilde{f}_n^{(m)}(x, -y) \quad (49)$$

および

$$\tilde{g}_n^{(n-2m+1)}(x, y) = 0, \quad (m = 1, \dots, n) \quad (50)$$

$$\tilde{f}_n^{(n-2m)}(x, y) = 0, \quad (m = 1, \dots, n-1) \quad (51)$$

が得られる．故に，関数 f_n, g_n およびその複素共役 f_n^*, g_n^* の形式的ローラン展開は，

$$\begin{aligned} g_n(x, y; t) &= \sum_{m=0}^n \tilde{g}_n^{(n-2m)}(x, y) t^{n-2m}, \\ f_n(x, y; t) &= \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{f}_n^{(n-2m-1)}(x, y) t^{n-2m-1} \end{aligned} \quad (52)$$

および

$$\begin{aligned} g_n^*(x, y; t) &= \sum_{m=0}^n \tilde{g}_n^{(-n+2m)}(x, y) t^{n-2m}, \\ f_n^*(x, y; t) &= \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{f}_n^{(-n+2m+1)}(x, y) t^{n-2m-1} \end{aligned} \quad (53)$$

として表現される．ここで，

$$\tilde{g}_n^{(-m)}(x, y) = \tilde{g}_n^{(m)}(x, -y), \quad \tilde{f}_n^{(-m)}(x, y) = \tilde{f}_n^{(m)}(x, -y) \quad (54)$$

であることに注意せよ．Weyl 解からこのローラン係数への制限は，付録 A で調べる．

関数 f_n, g_n に対する戸田分子方程式 (25) およびその線形性から導出された方程式 (46) は，任意のパラメータ t で成立する．したがって，これらの方程式 (25) および (46) に於いて，構成関数 f_n, g_n をローラン展開することによりパラメータ t の各次数に対する方程式が得られる．

これらの方程式の最高次数のものだけを書き出すと，

$$(D_X^2 - D_Y^2) \tilde{g}_n^{(n)} \cdot \tilde{g}_n^{(n)} = 2 \tilde{g}_{n+1}^{(n+1)} \tilde{g}_{n-1}^{(n-1)} \quad (55)$$

$$(D_X^2 - D_Y^2) \tilde{f}_n^{(n-1)} \cdot \tilde{f}_n^{(n-1)} = 2 \tilde{f}_{n+1}^{(n)} \tilde{f}_{n-1}^{(n-2)} \quad (56)$$

$$(D_X^2 - D_Y^2) \tilde{f}_n^{(n-1)} \cdot \tilde{g}_n^{(n)} = \tilde{f}_{n+1}^{(n)} \tilde{g}_{n-1}^{(n-1)} + \tilde{f}_{n-2}^{(n-1)} \tilde{g}_{n+1}^{(n+1)} \quad (57)$$

となる．実際，関数 g_n および f_n の行列式表現から関数 $\tilde{g}_n^{(n)}(x, y)$ および $\tilde{f}_n^{(n-1)}(x, y)$ が

$$\tilde{g}_n^{(n)}(x, y) = \begin{vmatrix} v & L_- v & \cdots & L_-^{n-1} v \\ L_+ v & L_+ L_- v & \cdots & L_+ L_-^{n-1} v \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_+^{n-1} v & L_+^{n-1} L_- v & \cdots & L_+^{n-1} L_-^{n-1} v \end{vmatrix}, \quad (58)$$

$$\tilde{f}_n^{(n-1)}(x, y) = \begin{vmatrix} L_+ L_- v & \cdots & L_+ L_-^{n-1} v \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_+^{n-1} L_- v & \cdots & L_+^{n-1} L_-^{n-1} v \end{vmatrix} \quad (59)$$

で与えられるため，最高次に対する方程式 (55)–(57) は，この行列表現を用いると全て Pfaffian 恒等式に帰着されることが示される．ここで， $u = (x + y)/2$ および $v = (x - y)/2$ である．

一般に，関数 g_n と f_n は扁平楕円座標 x, y の有限多項式であるが，その明確な多項式表現を求めることは容易でない．しかしながら，数値計算により

$$g_0^{(0)} = 1, \quad g_1^{(1)} = v, \quad g_2^{(2)} = 4uv^3, \quad g_3^{(3)} = 256u^3v^6, \dots \quad (60)$$

であることから， g_n に対する最高次項 $\tilde{g}_n^{(n)}(x, y)$ および最低次項 $\tilde{g}_n^{(-n)}(x, y)$ は，それぞれ

$$\tilde{g}_n^{(n)}(x, y) = \begin{vmatrix} v & L_- v & \cdots & L_-^{n-1} v \\ L_+ v & L_+ L_- v & \cdots & L_+ L_-^{n-1} v \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_+^{n-1} v & L_+^{n-1} L_- v & \cdots & L_+^{n-1} L_-^{n-1} v \end{vmatrix} = 2^{n(n-1)} A_n u^{\frac{n(n-1)}{2}} v^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad (61)$$

および

$$\tilde{g}_n^{(-n)}(x, y) = \begin{vmatrix} u & L_- u & \cdots & L_-^{n-1} u \\ L_+ u & L_+ L_- u & \cdots & L_+ L_-^{n-1} u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_+^{n-1} u & L_+^{n-1} L_- u & \cdots & L_+^{n-1} L_-^{n-1} u \end{vmatrix} = 2^{n(n-1)} A_n u^{\frac{n(n+1)}{2}} v^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad (62)$$

と予想される．ここで $A_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(n-k) \right)^2$ である．同様にして， f_n に対する最高次項 $\tilde{f}_n^{(n-1)}(x, y)$ および最低次項 $\tilde{f}_n^{(-n+1)}(x, y)$ は，

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n^{(n-1)}(x, y) &= \begin{vmatrix} L_+ L_- v & \cdots & L_+ L_-^{n-1} v \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_+^{n-1} L_- v & \cdots & L_+^{n-1} L_-^{n-1} v \end{vmatrix} \\ &= \frac{\tilde{g}_n^{(n)}(x, y)}{\sqrt{\pi}} \times \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=0}^m (-1)^{l-m} \frac{\Gamma(\frac{2m+1}{2}) \Gamma(\frac{2(n-l)+1}{2})}{\Gamma(\frac{2(m-l)+3}{2}) \Gamma(l+1) \Gamma(m-l+1) \Gamma(n-m)} u^{2l} v^{-2m-1} \end{aligned} \quad (63)$$

および

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n^{(-n+1)}(x, y) &= \begin{vmatrix} L_+ L_- u & \cdots & L_+ L_-^{n-1} u \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_+^{n-1} L_- u & \cdots & L_+^{n-1} L_-^{n-1} u \end{vmatrix} \\ &= \frac{\tilde{g}_n^{(-n)}(x, y)}{\sqrt{\pi}} \times \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=0}^m (-1)^{l-m} \frac{\Gamma(\frac{2m+1}{2}) \Gamma(\frac{2(n-l)+1}{2})}{\Gamma(\frac{2(m-l)+3}{2}) \Gamma(l+1) \Gamma(m-l+1) \Gamma(n-m)} u^{-2m-1} v^{2l}. \end{aligned} \quad (64)$$

と予想される．関数 $\tilde{g}_n^{(n)}(x, y)$ の明確な多項式表現が正しいことは，戸田分子方程式の最高次数の方程式 (55) に着目して数学的帰納法により示される．関数 $\tilde{f}_n^{(n-1)}(x, y)$ に対しては，戸田分子方程式の最高次数に対する方程式 (56) を直接使うのではなくて，(57) に代入することで数学的

帰納法を用いて、この表式が正しいことが示される^{†2}。

中村予想 (37)–(38) に構成関数 f_n, g_n のローラン展開を代入することにより、各次数でその予想に対応する方程式が得られる。特に、最高次の方程式は

- 中村の第一組

$$D_x(\tilde{g}_n^{(n)}(x, y) \cdot \tilde{f}_n^{(n-1)}(x, y) - \tilde{g}_n^{(-n)}(x, y) \cdot \tilde{f}_n^{(-n+1)}(x, y)) = 0 \quad (65)$$

$$D_y(\tilde{g}_n^{(n)}(x, y) \cdot \tilde{f}_n^{(n-1)}(x, y) + \tilde{g}_n^{(-n)}(x, y) \cdot \tilde{f}_n^{(-n+1)}(x, y)) = 0 \quad (66)$$

- 中村の第二組

$$F(\tilde{g}_n^{(-n)}(x, y) \cdot \tilde{f}_n^{(n-1)}) = 0 \quad (67)$$

$$F(\tilde{g}_n^{(-n)}(x, y) \cdot \tilde{g}_n^{(n)}(x, y)) = 0 \quad (68)$$

と書ける。最低次に関する中村予想は、ローラン係数の対称性から明らかである。

中村予想の最高次の証明は、上で求めた明確な多項式表現をこれらの式 (65)–(68) に代入し直接計算することで正しいことが証明される。最低次についても、関係式 (49) を用いることで、中村予想が正しいことが示される。

6. 議 論

本論文では、定常軸対称な重力解である富松-佐藤解と戸田分子方程式の間の関係について考察した。3 節では、戸田分子方程式の特別な解のペアには線形性が存在することを見出した。4 節では、戸田分子方程式の特別な解のペアに現れるこの線形性が Ernst 方程式の中に現れる $SU(1,1)$ グローバル対称性と関係していることを明らかにした。また、中村予想の第一組および第二組は、この変換の下で不変であることも示された。物理的には、この $SU(1,1)$ 変換は、NUT パラメータを持つ重力解への変換であると解釈される。従って、中村予想が正しいとすれば、戸田分子方程式の特別な解のペアの線形結合は、自然に NUT パラメータを含む重力解（富松-佐藤 NUT 解）を生成する。

中村予想の第一組は、 ψ が式 (34) の形で与えられている場合、いつでも成立することが確かめられた。FKY の証明は、この構造をうまく取り入れ拡張された行列式を用いて、第一組を Pfaffian 恒等式に帰着させたことが分かる。富松-佐藤クラスの解に対する中村予想の第二組を証明するために、 p, q の代わりに複素パラメータ t を導入した。パラメータ t で構成関数 g_n, f_n を展開することにより、それぞれのローラン係数の性質が明らかにされた。さらに、直接的計算によりローラン係数の最高次 $\tilde{g}_n^{(n)}, \tilde{f}_n^{(n-1)}$ が解析的に求まり、中村予想がパラメータ t の最高次

^{†2} 勿論、戸田分子方程式 (56) を使って証明できるであろうが、証明には積・和に関する非自明な恒等式が必要となる。

および最低次で正しいことが証明された．

戸田分子解の行列式による構成を一端離れば，ローラン級数展開としての展開式は，整数でない変形パラメータ n に対しても中村予想が成り立つ解が存在する可能性を示唆する．実際に，Weyl 解は，変形パラメータ n が任意の値に対しても中村予想の双線形形式を満たしている．これは，堀 [15] や Cosgrove [16] らによる一般化された富松-佐藤解と関係していることが予想される．

本論文では，構成関数のローラン係数を多項式表現として決定できなかったために，パラメータ t の一般の次数に対して中村予想が正しいことを証明できなかった．この問題を解決するためには，戸田分子方程式の特別な解が満たす性質，Neugebauer 解との関係および戸田分子方程式の対称 Bäcklund 変換等を詳細に解析する必要がある．また，佐々ら [17] によって数値計算から導出された富松-佐藤解が満たす双線形形式（付録 B を参照のこと）が何を示唆しているかを吟味する必要がある．これらのことを念頭において，全ての次数についての証明は現在考察中である [18]．また，上で指摘したように，もし行列式解から離れて解析的関数として富松-佐藤クラスの解が得られたら，それに対応する戸田分子方程式の拡張が存在するかもしれない．この可能性を調べることにより，重力解と高次元可積分模型の間の興味深い関係が明らかにされるであろう．

付録 A：ローラン係数に対する Weyl 解などからの制限

この付録 A では，Weyl 解等の既知の解からローラン展開係数に関する制限を与える．回転のない軸対称重力場である Weyl 解の場合， $p = \pm 1 (q = 0)$ が対応する．すなわち， $t = \pm 1$ である．そのとき，(53)は，

$$\begin{aligned} g_n(x, y; \pm 1) &= (\pm 1)^n \sum_{m=0}^n \tilde{g}_n^{(n-2m)}(x, y), \\ f_n(x, y; \pm 1) &= (\pm 1)^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{f}_n^{(n-2m-1)}(x, y) \end{aligned} \quad (69)$$

となる．そのとき，関数 g_n および f_n に対する正確な解は

$$\begin{aligned} g_n(x, y; \pm 1) &= (\pm 1)^n \frac{A_n}{2} (x^2 - 1)^{\frac{n(n-1)}{2}} ((x+1)^n + (x-1)^n), \\ f_n(x, y; \pm 1) &= (\pm 1)^{n-1} \frac{A_n}{2} (x^2 - 1)^{\frac{n(n-1)}{2}} ((x+1)^n - (x-1)^n) \end{aligned} \quad (70)$$

で与えられる．パラメータ $t = \pm i$ のときは，

$$\begin{aligned} g_n(x, y; \pm i) &= (\pm i)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \tilde{g}_n^{(n-2m)}(x, y), \\ f_n(x, y; \pm i) &= (\pm i)^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \tilde{f}_n^{(n-2m-1)}(x, y) \end{aligned} \quad (71)$$

となる．また， g_n および f_n の行列式 (41) の形から

$$\begin{aligned} g_n(x, y; \pm i) &= (\mp i)^n \frac{A_n}{2} (1 - y^2)^{\frac{n(n-1)}{2}} ((y+1)^n + (y-1)^n), \\ f_n(x, y; \pm i) &= (\mp i)^{n-1} \frac{A_n}{2} (1 - y^2)^{\frac{n(n-1)}{2}} ((y+1)^n - (y-1)^n) \end{aligned} \quad (72)$$

が導出される．これらの正確な解から，ローラン展開係数に

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n \tilde{g}_n^{(n-2m)}(x, y) &= \frac{A_n}{2} (x^2 - 1)^{\frac{n(n+1)}{2}} ((x+1)^n + (x-1)^n), \\ \sum_{m=0}^n (-1)^m \tilde{g}_n^{(n-2m)}(x, y) &= (-1)^n \frac{A_n}{2} (1 - y^2)^{\frac{n(n-1)}{2}} ((y+1)^n + (y-1)^n) \\ \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{f}_n^{(n-2m-1)}(x, y) &= \frac{A_n}{2} (x^2 - 1)^{\frac{n(n+1)}{2}} ((x+1)^n - (x-1)^n), \\ \sum_{m=0}^n (-1)^m \tilde{f}_n^{(n-2m-1)}(x, y) &= (-1)^n \frac{A_n}{2} (1 - y^2)^{\frac{n(n-1)}{2}} ((y+1)^n - (y-1)^n) \end{aligned} \quad (73)$$

という制限が得られる．

付録 B：富松-佐藤解に対する広田-佐々双線形形式

ここでは，富松-佐藤解に対して広田-佐々によって見出された双線形形式 [17] の $SU(1,1)$ 変換性について議論する．

富松-佐藤クラスの解を満たす双線形形式として中村予想の式以外に

$$[(x^2 - 1)D_x^2 + 2x\partial_x - (y^2 - 1)D_y^2 + c_n](g_n \cdot f_n + g_n^* \cdot f_n^*) = 0 \quad (74)$$

$$[(y^2 - 1)D_y^2 + 2y\partial_y - (x^2 - 1)D_x^2 + c_n](g_n \cdot f_n - g_n^* \cdot f_n^*) = 0 \quad (75)$$

$$[yD_y^2 + \partial_y + xD_xD_y](g_n \cdot f_n + g_n^* \cdot f_n^*) = 0 \quad (76)$$

$$[xD_y^2 + \partial_x + yD_xD_y](g_n \cdot f_n - g_n^* \cdot f_n^*) = 0 \quad (77)$$

$$[xD_x + yD_y](g_n \cdot g_n^* - f_n \cdot f_n^*) = 0 \quad (78)$$

$$[xD_x^2 + \partial_x](g_n \cdot g_n^* - f_n \cdot f_n^*) = 0 \quad (79)$$

$$[yD_y^2 + \partial_y](g_n \cdot g_n^* - f_n \cdot f_n^*) = 0 \quad (80)$$

$$[D_x^2 + x\partial_x + D_y^2 + y\partial_y + c_n](g_n \cdot g_n^* - f_n \cdot f_n^*) = 0 \quad (81)$$

$$D_x D_y g_n \cdot g_n^* = 0 \quad (82)$$

$$D_x D_y f_n \cdot f_n^* = 0 \quad (83)$$

$$D_x D_y g_n \cdot f_n^* = 0 \quad (84)$$

が数値計算により導出されている． $SU(1,1)$ 変換性に着目すると，式 (78)–(84) は，不変性を保つことが分かる．一方で，式 (74)–(77) は不変でない．これらが $SU(1,1)$ 不変であるためには，さらに

$$[(x^2 - 1)D_x^2 + 2x\partial_x - (y^2 - 1)D_y^2 + c_n](g_n \cdot g_n + f_n^* \cdot f_n^*) = 0 \quad (85)$$

$$[(y^2 - 1)D_y^2 + 2y\partial_y - (x^2 - 1)D_x^2 + c_n](g_n \cdot g_n - f_n^* \cdot f_n^*) = 0 \quad (86)$$

$$[yD_y^2 + \partial_y + xD_x D_y](g_n \cdot g_n + f_n^* \cdot f_n^*) = 0 \quad (87)$$

$$[xD_y^2 + \partial_x + yD_x D_y](g_n \cdot g_n - f_n^* \cdot f_n^*) = 0 \quad (88)$$

の式が要求される．ここで導出された式 (85)–(88) も数値計算により正しいことが確かめられる．また，解を Weyl 解に限定すれば，これらの式は，すべて正しいことが証明される．一般の場合に対しても関数 g_n, f_n を t に関してローラン展開することで，これらの式が最高次および最低次で正しいことが証明される．

参 考 文 献

- [1] F. J. Ernst, Phys. Rev. 167 (1968) 1175.
- [2] R. Geroch, J. Math. Phys. 13 (1972) 394.
- [3] A. Tomimatsu and H. Sato, Prog. Theor. Phys. 50 (1973) 95.
- [4] D. Maison, Phys. Rev. Lett. 41 (1978) 521.
D. Maison, J. Math. Phys. 20 (1979) 871.
- [5] V. A. Belinski and V. E. Zakharov, Sov. Phys. JETP 48 (1978) 985.
- [6] G. Neugebauer, J. Phys. A12 (1979) L67; 13 (1980) L19.
- [7] M. Sato, Soliton Equations as Dynamical Systems on a infinite dimensional Grassmann manifold, 数理解析研究所講究録 439 「ランダム系と力学系」(1981) 30–46.
- [8] A. Nakamura and Y. Ohta, J. Phys. Soc. Japan 60 (1991) 1835.
- [9] A. Nakamura, J. Phys. Soc. Japan 62 (1993) 368.
- [10] T. Fukuyama, K. Kamimura and S. Yu, J. Phys. Soc. Japan 64 (1995) 3201.
- [11] H. Stephani et. al., Exact solutions of Einstein's field equations, Cambridge Univ. Press (2003).
- [12] S. Hori, Prog. Theor. Phys. 59 (1978) 1870.
- [13] R. Vein and P. Dale, Determinants and their applications in mathematical physics, Springer-Verlag New York Inc. (1991).

- [14] 広田良吾, 「直接法によるソリトンの数値」(岩波書店, 1991) .
- [15] S. Hori, Prog.Theor. Phys. 95 (1996) 65.
O. Tanimura and S. Hori, Prog. Theor. Phys. 99 (1998) 783.
- [16] C.M. Cosgrove, J. Phys. A10 (1977) 1481.
- [17] 佐々成正, 定常軸対称 Einstein 方程式と広田の方法, 数理解析研究所講究録 868 「非線型可積分系の研究の現状と展望」(1994) 74–84.
- [18] T. Fukuyama and K. Koizumi, in preparation.

Interconnection between Tomimatsu-Sato Solutions and Semi Infinite Solutions for Toda Molecule Equation

Kozo KOIZUMI

Takeshi FUKUYAMA

Abstract

We discuss Nakamura's conjecture that Tomimatsu-Sato solution for axial symmetric Einstein equation is generated by special pair of solutions for Toda molecule equation. $SU(1,1)$ symmetry on Ernst equation is reflected as the linear combinations of special pair of solutions for Toda molecule equation. Nakamura's conjecture is proved by expanding component functions in a parameter t at the highest order and the lowest order.

Keywords: General relativity, Ernst Equation, Tomimatsu Sato Solutions, Toda Molecule Equation, Nakamura's Conjecture